PITP 2014
String Compactification

M. Wijnholt. LMU Munich

Brief recap

Heterotic compactification – the story so far….

Kaluza-Klein Ansatz:

$$M^{1,9} = R^{1,3} \times X_6$$

BPS equations $\nabla_m \epsilon_6^+ = 0$ $F_{mn}\Gamma^{mn}\epsilon_6^+ = 0$

$\nabla_m \epsilon_6^+ = 0 \longleftrightarrow$ X_6 is Calabi-Yau

Complex structure and Kahler deformations

$$\mathcal{M}_{\text{metric}} = \mathcal{M}_{\text{complex}} \times \mathcal{M}_{\text{Kahler}}$$

$$\dim_C = h^{2,1}(X) \qquad \dim_R = h^{1,1}(X)$$

B-field complexifies $\mathcal{M}_{\text{Kahler}}$

$F_{mn}\Gamma^{mn}\epsilon_6^+ = 0 \longleftrightarrow$ Hermitian Yang-Mills $F^{0,2} = 0$ $g^{i\bar{j}}F_{i\bar{j}} = 0$

$\longleftrightarrow$ holomorphic poly-stable bundles

Bundle-valued Dolbeault cohomology

Since we had $\bar{\partial}_A^2 = 0$, for holomorphic bundles we can define a generalization of the Dolbeault complex:

$$0 \to \Omega^{0,0}(X,V) \xrightarrow{\bar{\partial}_A} \ldots\ldots \xrightarrow{\bar{\partial}_A} \Omega^{0,n}(X,V) \to 0$$

$$H^p(X,V) = \frac{\{\bar{\partial}\text{-closed V-valued (0,p)-forms}\}}{\{\bar{\partial}\text{-exact V-valued (0,p)-forms}\}}$$

These cohomology groups are just what we need to understand the Kaluza-Klein reduction of the gauge sector. They have the following interpretation:

$H^0(X,V)$ $\longrightarrow$ Counts unbroken gauge generators that survive in effective 4d theory

$H^1(X,V)$ $\longrightarrow$ Counts charged matter fields in effective 4d theory

Let's illustrate this with an example.

Example: the standard embedding

We consider the $E_8 \times E_8$ heterotic string.

Take the connection for the first E_8 bundle to be the spin connection of X_6 .

Under the maximal subgroup $SU(3) \times E_6 \subset E_8$, the adjoint representation decomposes as:

$$\mathbf{248} = (\mathbf{3},\mathbf{27}) + (\overline{\mathbf{3}},\overline{\mathbf{27}}) + (\mathbf{1},\mathbf{78}) + (\mathbf{8},\mathbf{1})$$

At the level of Dolbeault cohomology, this yields

$$H^p(X, V_{E_8}) = H^p(TX) \otimes \mathbf{27} + H^p(T^*X) \otimes \overline{\mathbf{27}} + H^p(O_X) \otimes \mathbf{78} + H^p(\mathrm{End}_0(TX)) \otimes \mathbf{1}$$

The 4d spectrum is then:

$p = 0$ Gauge field in **78** , the adjoint of E_6

$p = 1$ $h^1(TX) = h^{2,1}(X)$ chirals in **27**;

$H^1(T^*X) = h^{1,1}(X)$ chirals in $\overline{\mathbf{27}}$

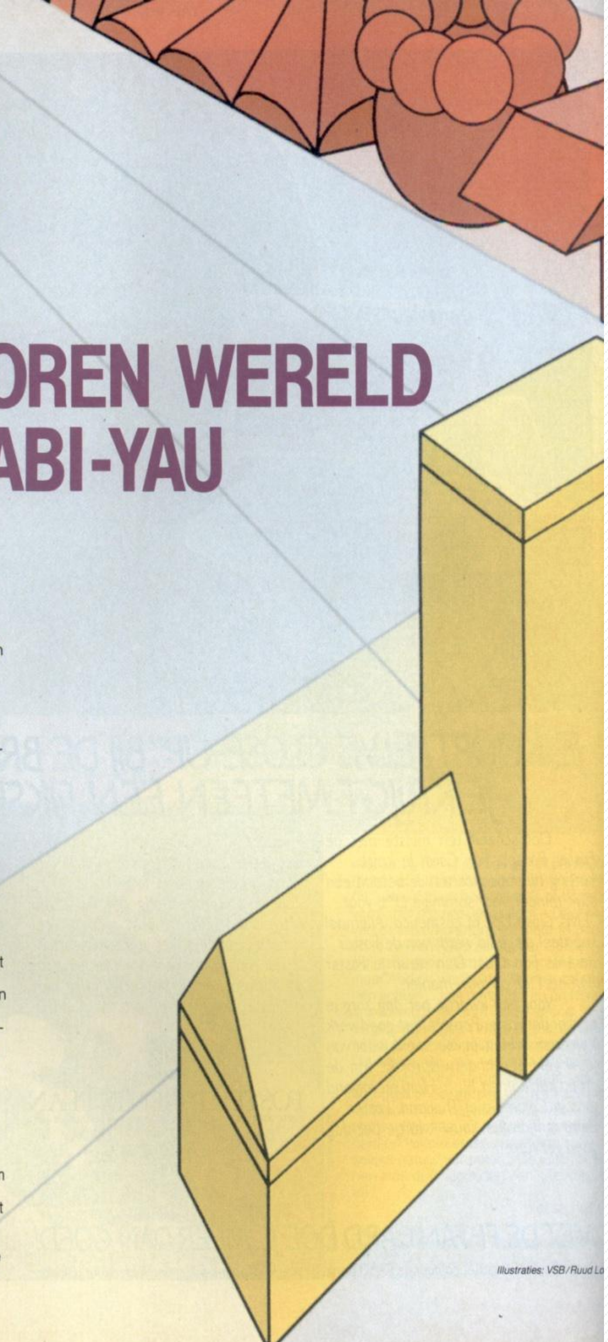
$\longrightarrow$ E_6 Grand Unified Theory with $h^{2,1}(X) - h^{1,1}(X) = -\chi(X)/2$ generations

The next two slides are from Kijk Magazine, August 1987.

“The lost world of Calabi-Yau”

Hebben Einstein en zijn navolgers een denkfout gemaakt? De Theorie over Alles van Green en Schwarz wijst erop. Volgens beide geleerden bestaat er een onzichtbare schaduwwereld in zes dimensies. Wis- en natuurkundigen zijn door deze nieuwe theorie in grote opwinding geraakt.

DE VERLOREN WERELD VAN CALABI-YAU



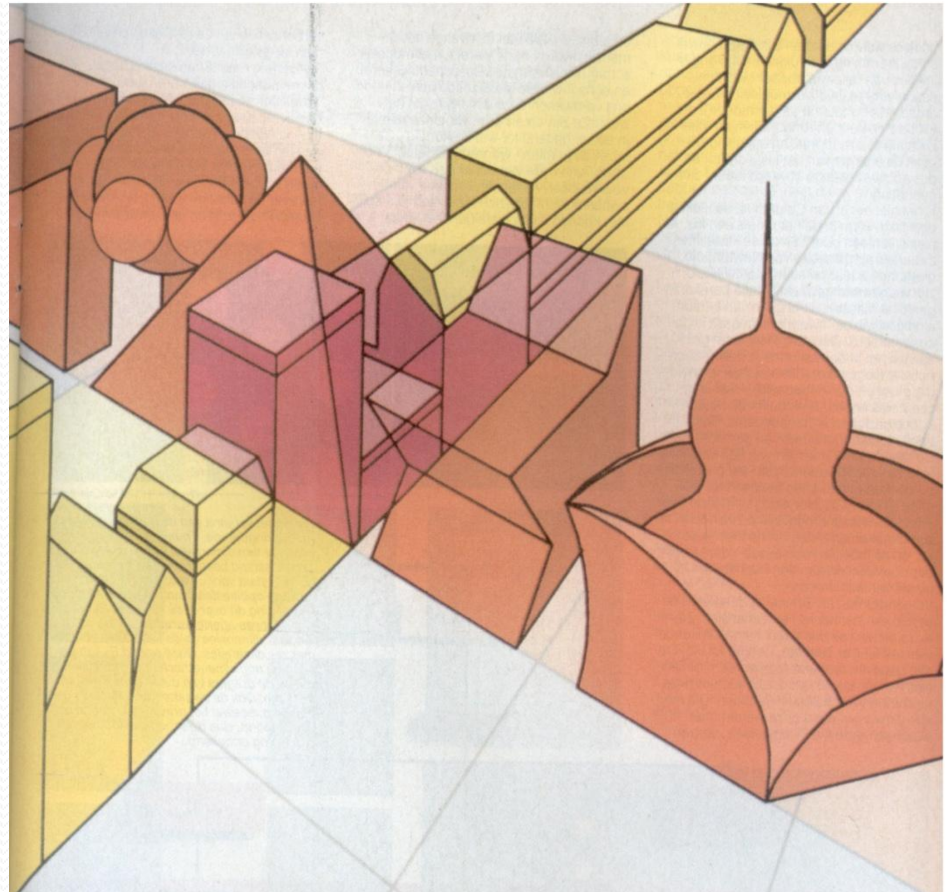
Pas op voor de schaduwwereld, die dringt dóór alles heen," waarschuwden drie natuurkundigen in januari vorig jaar hun collega's. Aanvankelijk leek het een grap, maar even later stond hun waarschuwing ook in het wetenschappelijke tijdschrift *Nature* gepubliceerd. Daarin beschreven zij hoe het heelal kan zijn gevuld met schaduwmaterie: een spookachtige en voor ons onzichtbare materie, die een volkomen eigen leven leidt. Er kunnen schaduwmelkwegstelsels bestaan, schaduwsterren en schaduwplaneten. Zelfs schaduwmensen. Zien of voelen doen we die schaduwwereld niet. Als iemand een schaduwrots in zijn hand had, zou die er dwars doorheen gaan. Alleen door middel van zwaartekrachtsgolven kan met de schaduwwereld worden gecommuniceerd, maar die zijn uiterst moeilijk aan te tonen. „Wie dit leest kan zich dus ongemerkt bevinden in een schaduwberg, of zelfs op de bodem van een schaduwoceaan," besloten de geleerden hun betoog. Science fiction? Geenszins. Het zijn juist de knapste koppen ter wereld die deze spookachtige mogelijkheid hebben ontdekt.

In feite was het Albert Einsteins droom: het vervolmaken van één enkele, allesomvattende theorie. Die zou het ontstaan moeten verklaren van materie, energie en alle werkzame krachten in het heelal. Maar ondanks dertig jaar van inspanning heeft de grote geleerde zijn doel nooit kunnen bereiken. Op de dag voordat hij plotseling stierf, in 1955, puzzelde hij nog steeds over zijn wiskundige vergelijkingen, niet dichter bij een oplossing dan toen hij ooit was begonnen.

De droom stierf niet met Einstein. Een nieuwe generatie van natuurkundigen nam de speurtocht over en ontdekte ook waarom Einstein had gefaald. Toen hij met zijn berekeningen begon, waren er nog maar twee basiskrachten in de natuur bekend: de elektromagnetische kracht en de zwaartekracht. Later bleken er ook krachten te bestaan die alleen werkzaam waren op de uiterst kleine schaal van het atoom. De sterke kracht bijvoorbeeld houdt de atoomkern samen ondanks de afstotende werking tussen de deeltjes in die kern onderling. De zwakke kracht is verantwoordelijk voor bepaalde types radioactief verval en is onmisbaar bij kernfusieprocessen, waardoor ook de zon schijnt. Er zijn dus minstens vier krachten die – als ze met elkaar in verband staan – tijdens het ontstaan van het heelal als één gemeenschappelijke oerkracht werkzaam moeten zijn geweest. Zou die oerkracht ooit kunnen worden aangetoond?

In het begin vorderde de speurtocht maar heel langzaam. Niet eens vanwege het gebrek aan gegevens, als wel door het gebrek aan een begrijpelijk wiskundig model waarmee de krachten konden worden verklaard. Elektriciteit en magnetisme bijvoorbeeld lijken op het oog twee volkomen verschillende verschijnselen. Toch kunnen ze wiskundig worden beschreven als een uiting van één en dezelfde, elektromagnetische kracht. Pas in 1974 kon een wiskundig model worden opgesteld die de werking van de sterke kracht beschreef en in 1979 lukte het drie natuurkundigen, Glashow, Salam en Weinberg, een verband te leggen tussen de zwakke en de elektromagnetische kracht. Beide krachten komen voort uit de zogenaamde elektrozwakke kracht (zie hiertoe ook het schema op pagina 24). Glashow en Georgi namen de volgende stap en verbonden de sterke kracht met de elektrozwakke kracht. Met veel gewichtigheid noemden zij hun resultaat GUT, of de „Grand Unified Theory" (Grote Verenigde Theorie). Maar met de verwezenlijking van Einsteins ideaal had dit nog niet veel te maken. GUT werkt alleen op atomaire schaal, over zéér kleine afstand. De algemene relativiteitstheorie van Einstein beschrijft de kromming van ruimte en tijd onder invloed van de zwaartekracht over zeer gróte afstand. Alle pogingen om beide theorieën met elkaar te verbinden leken dan ook gedoemd te stranden op de klippen van deze tegenstelling.

En toch: sinds 1984 schijnt er voor het eerst licht in de duisternis die Einstein en zijn navolgelingen nooit mochten doorbreken. In augustus van dat jaar vervolmaakten de Britse natuurkundige Michael Green en zijn Amerikaanse collega John Schwarz hun theorie over „superstring" (superdraad). Alle krachten in de natuur, àlle

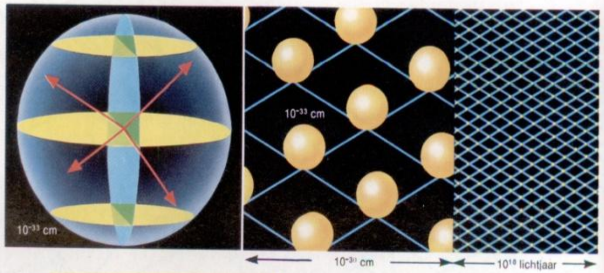


Op het grensvlak van twee werelden. Onze wereld (geel) en de schaduwwereld (bruin) leven volkomen langs elkaar heen. Ook dóór elkaar. Waar zij elkaar raken is hooguit sprake van een uitwisseling van zwaartekrachtsgolven.

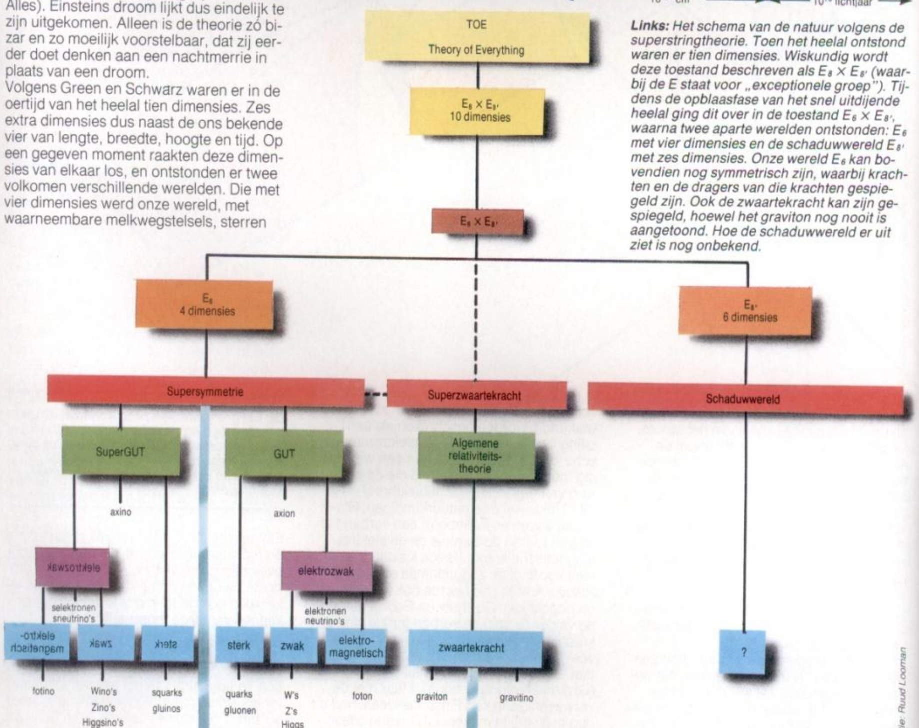
Illustraties: VSB/Ruud Lo

deeltjes waaruit atomen zijn opgebouwd èn de kromming van ruimte en tijd onder invloed van de zwaartekracht worden daarin voorgesteld als zéér kleine lusjes draad (10^{-35} meter in de doorsnede), die elk op zich kunnen ronddraaien en trillen. De mate van ronddraaiing en trilling bepaalt de energie van het lusje draad, en dus ook welk deeltje of welke kracht zich openbaart.
Is het niet het ei van Columbus, de kleinst denkbare vorm in de natuur als een lus, in plaats van een punt? Sinds de klassieke zwaartekrachtstheorie van Newton, die driehonderd jaar geleden is ontwikkeld, zijn we gewend geweest bij alle berekeningen over massa's uit te gaan van een oneindig kleine punt waarin de massa is geconcentreerd. Oneindig klein staat gelijk aan nul, en in de wiskunde is deling door nul niet toegestaan (het resultaat is oneindig groot en dus onbepaald). Heel langzaam was er een denkfout in de natuurkunde geslopen en tot augustus 1984 heeft niemand daar iets van gemerkt.
De theorie van Green en van Schwarz is in feite zó allesomvattend, dat veel geleerden nu denken te maken te hebben met TOE, of de „Theory of Everything" (Theorie over Alles). Einsteins droom lijkt dus eindelijk te zijn uitgekomen. Alleen is de theorie zó bizar en zo moeilijk voorstelbaar, dat zij eerder doet denken aan een nachtmerrie in plaats van een droom.
Volgens Green en Schwarz waren er in de oertijd van het heelal tien dimensies. Zes extra dimensies dus naast de ons bekende vier van lengte, breedte, hoogte en tijd. Op een gegeven moment raakten deze dimensies van elkaar los, en ontstonden er twee volkomen verschillende werelden. Die met vier dimensies werd onze wereld, met waarneembare melkwegstelsels, sterren en planeten. Die met de overige zes dimensies werd „hun" wereld, met mogelijk schaduwmelkwegstelsels, schaduwsterren en schaduwleven in datzelfde heelal. Voor ons verdwenen deze dimensies uit het zicht. Ze zijn op elk punt van onze ruimte in elkaar geperst tot wat wiskundig „Calabi-Yau ruimten" worden genoemd. Voor „hun" zijn onze vier dimensies even onvoorstelbaar. Alleen door middel van de zwaartekracht, die zich tegelijkertijd afsplitste, kunnen beide werelden met elkaar zijn verbonden. Voor de rest leven ze volkomen langs elkaar heen.
„De eerste reactie van onze collega's was of we misschien gek waren geworden," vertelt John Schwarz. „Maar misschien heb ik het daar zelf naar gemaakt. Het was tijdens een bijeenkomst van natuurkundigen in Aspen dat in de pauze een cabaret werd opgevoerd. Toen dat was afgelopen stond ik op en begon enthousiast te vertellen over de schaduwwereld, enzovoort. Niemand die er toen een touw aan kon vastknopen en iedereen dacht dat ik stond te raaskallen en dat het een grap was. Toen hebben twee collega's een witte jas aangetrokken en zijn het podium opgestormd. Ik werd in een dwangbuis geperst en vervolgens afgevoerd."
Hoewel niemand van de aanwezigen Schwarz toen serieus nam, bleek al snel dat het om méér ging dan een grap. Eén van de eersten die overtuigd raakte was Edward Witten. Al een paar jaar lang had hij het voorbereidende werk van Schwarz en Green met interesse gevolgd en raakte daarbij steeds meer onder de indruk. Eenmaal Witten overtuigd en de rest van de natuurkundigen volgde op de voet. „Ed Witten is een zeer briljant wiskundige," zegt de Nobelprijswinnaar Murray Gell-Mann. „Het was dan ook een triomf voor de superstringtheorie dat hij erbij betrokken raakte." Witten (36) wordt door zijn collega's als zó geniaal beschouwd dat zij min of meer voetstoots aannemen wat hij zegt. Bovendien heeft hij een buitengewoon talent voor zowel de wis- als natuurkunde. Er zijn natuurkundigen die zeggen dat zij elke hoop op een Nobelprijs hebben opgegeven nadat zij Witten hadden ontmoet en zich realiseerden met welk kaliber geleerde zij te maken hadden. Evenzo zijn er wiskundigen die hopen dat Witten in de natuurkunde zal blijven. Zij zeggen dat àls er een Nobelprijs voor de wiskunde zou hebben bestaan, Witten die al lang zou hebben gewonnen.
Nu – anno 1987 – is er geen wetenschappelijk tijdschrift te vinden of het staat bol van de artikelen over superstring. Een ruwe schatting is dat er zo'n honderd artikelen per maand over het onderwerp worden gepubliceerd. Sterrenkundige artikelen over de hoeveelheid schaduwmaterie in het heelal, kosmologische beschouwingen over de invloed van superstring tijdens de oerexplosie en wiskundige verkenningen hoe de schaduwwereld er in zes dimensies uit zou zien. Wat dat laatste betreft tasten we waarschijnlijk voorgoed in het duister, want zoals gezegd is een communicatie met die wereld vooralsnog onmogelijk. Alleen Sheldon Glashow, één van de opstellers van de Grand Unified Theory, is nog niet overtuigd. Hij vindt dat dit alles alleen een *wiskundige* theorie is, die niets met de natuurkundige werkelijkheid te maken heeft. Op een recente bijeenkomst van natuurkundigen waarschuwde hij voor te veel optimisme door middel van het volgende rijm: „Please heed our advice, that you too are not smitten... The book is not finished, the last word is not Witten." Hoewel niet goed vertaald komt dat op het volgende neer: „Volg dit advies en loop niet op òns te vitten: het boek is niet af en het laatste woord is niet Witten."

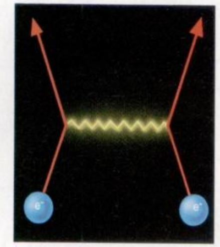
Tekst: Carl Koppeschaar



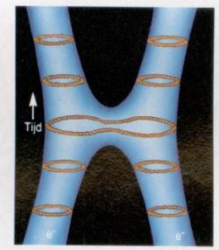
Links: Hoewel de wiskundige theorie zeer ingewikkeld is, proberen we toch een voorstelling te maken van het uit elkaar vallen van de oorspronkelijke tien dimensies. In het begin waren de tien dimensies even groot ***(links.)*** *Naarmate het heelal groter werd, dijden vier dimensies uit (ruimte en tijd, hier voorgesteld door een plat vlak), terwijl de overige zes dimensies (voorgesteld door bollen) dezelfde afmeting behielden* ***(midden)****. Vandaag de dag zijn de zes dimensies voor ons onzichtbaar, maar bevinden zich nog steeds als compacte „Calabi-Yau-ruimten" op elk punt van ons netwerk van ruimte en tijd* ***(rechts)****.*

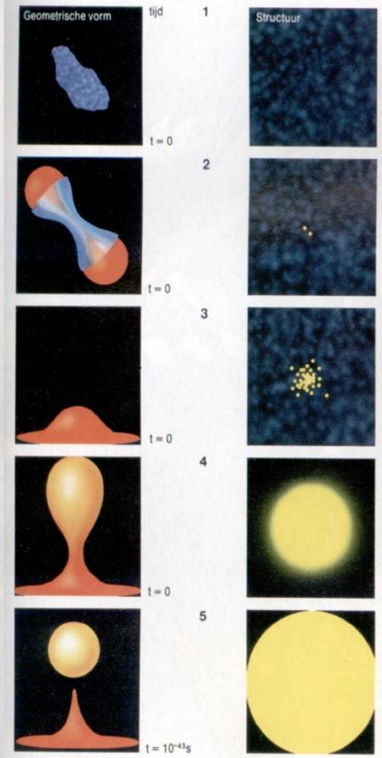


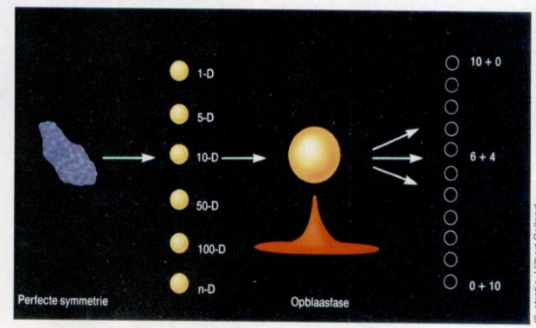
Links: Het schema van de natuur volgens de superstringtheorie. Toen het heelal ontstond waren er tien dimensies. Wiskundig wordt deze toestand beschreven als $E_8 \times E_{8'}$ (waarbij de E staat voor „exceptionele groep"). Tijdens de opblaasfase van het snel uitdijende heelal ging dit over in de toestand $E_6 \times E_{8'}$, waarna twee aparte werelden ontstonden: E_6 met vier dimensies en de schaduwwereld $E_{8'}$ met zes dimensies. Onze wereld E_6 kan bovendien nog symmetrisch zijn, waarbij krachten en de dragers van die krachten gespiegeld zijn. Ook de zwaartekracht kan zijn gespiegeld, hoewel het graviton nog nooit is aangetoond. Hoe de schaduwwereld er uit ziet is nog onbekend.



Rechtsboven: *De klassieke voorstelling van de werking van de elektromagnetische kracht. Twee puntvormig gedachte elektronen stoten elkaar af door uitwisseling van een lichtdeeltje. In de superstringtheorie is dit overbodig. Daar vormen de als lusjes voorgestelde elektronen gedurende korte tijd één geheel* ***(Daaronder)****.*







Links: *Het ontstaan van het heelal volgens de superstringtheorie. In het begin was er slechts sprake van een vacuüm. Er was geen materie en er heerste een perfecte symmetrie. Het aantal dimensies was onbepaald* ***(1)****. Als gevolg van een plotselinge „oprisping" in het vacuüm ontstonden uit het Niets het eerste deeltje en antideeltje. De perfecte symmetrie ging verloren en het aantal dimensies beperkte zich tot tien* ***(2)****. Direct na het ontstaan van het eerste paar deeltjes kwam de produktie van andere paren deeltjes op gang* ***(3)****. Uiteindelijk ontstond een ware vuurstorm* ***(4)****. Het tiendimensionale heelal maakte zich los van de rest van het vacuüm. De opblaasfase begint en het heelal dijt naar alle kanten uit* ***(5)****.*
Boven: *Een willekeurig aantal dimensies had kunnen bestaan. Uit de tien in ons heelal ontstond echter uiteindelijk de combinatie van zes en vier.*

Part II: perturbative IIB

Perturbative IIB

The bosonic fields of the 10d theory are:

$$g_{MN}, \qquad b_{MN}, \qquad \phi, \qquad \underbrace{C_{(0)}, \qquad C_{(2)MN}, \qquad C^{+}_{(4)MNPQ}}_{\text{RR anti-symmetric tensor fields}}$$

As for heterotic, consider Kaluza-Klein Ansatz of the form:

$$M^{1,9} = R^{1,3} \times X_6$$

Assume fluxes vanish. Supersymmetry variations simplify:

$$\delta\psi^1_M = \nabla_M \epsilon^1 = 0 \qquad \delta\psi^2_M = \nabla_M \epsilon^2 = 0$$

Here ϵ^1, ϵ^2 parametrize the *two* ten-dimensional SUSY variations.

$\longrightarrow$ As before, X_6 should be Calabi-Yau. But since we started with two spinors in *10d*, end up with *N*=2 supersymmetry in *4d*.

Closed string spectrum

The natural multiplets for *4d N=2* SUSY are gravity, vector, hyper.

multiplet	multiplicity
gravity	*1*
vector	$h^{2,1}(X)$
hyper	$h^{1,1}(X) + 1$

Massless modes of anti-symmetric tensor fields $\longleftrightarrow$ Harmonic forms on X_6

Eg: vector multiplets:

$$C^{+}_{(4)} = A^{I}_{\mu} dx^{\mu} \wedge \omega_{(3),I} \qquad \omega_{(3),I} \in H^{3}_{dR}(X, \mathbf{R}) \qquad \text{harmonic representative}$$

There are $2\,h^{2,1}(X) + 2$ such three-forms, but self-duality of $C^{+}_{(4)}$ eliminates half

$\longrightarrow$ $h^{2,1}(X)$ U(1) gauge fields pair up with complex structure moduli in vector multiplet

Remaining U(1) gauge field pairs up with $g_{\mu\nu}$ in gravity multiplet

Closed string spectrum

Similarly you can find the remaining massless modes. We expand

$$B_2 = b^I\,\omega_{(2),I} \qquad C_{(2)} = c^I\omega_{(2),I} \qquad C^+_{(4)} = d^I\omega_{(4,I)}$$

$$\omega_{(2),I} \in H^2_{dR}(X,\boldsymbol{R}) \qquad \omega_{(4),I} \in H^4_{dR}(X,\boldsymbol{R}) \cong H^2_{dR}(X,\boldsymbol{R})$$

Together with the Kahler moduli of the Calabi-Yau metric, this yields $h^{1,1}(X)$ hypermultiplets.

Finally we define the axio-dilaton:

$$\tau = i\,e^{-\phi} + C_{(0)}$$

Together with the *4d* Hodge duals of $(B_{\mu\nu}, C_{(2)\mu\nu})$, this gives one final hypermultiplet.

Towards N=1

We would now like to break further to *N=1 4d* supersymmetry.

There are basically two ways:

- fluxes ($\longrightarrow$ flux superpotentials)
- Defects (D-branes and O-planes)

We will only discuss some aspects of defects.

O-planes

Perturbative IIB has two basic Z_2 symmetries:

- world-sheet parity P (interchanges left- and right-movers)

$$C_{(0)} \to -C_{(0)}, \qquad B_{MN} \to -B_{MN}, \qquad C^{+}_{(4)MNPQ} \to -C^{+}_{(4)MNPQ}$$

- $(-1)^{F_L}$: acts as -1 if left-movers are in Ramond sector

$$C_{(0)} \to -C_{(0)}, \qquad C_{(2)MN} \to -C_{(2)MN}, \qquad C^{+}_{(4)MNPQ} \to -C^{+}_{(4)MNPQ}$$

Can further combine with involution σ of X_6.

An orientifold is an orbifold by involution that involves P.

Fixed planes are called *O-planes*

We will consider orientifolds of the form

$$(-1)^{F_L} P \sigma \qquad \sigma \text{ holomorphic}, \quad \sigma^* \Omega^{3,0} = -\Omega^{3,0}$$

This preserves $N=1$ SUSY and leads to O3/O7-planes. The other option would be:

$$P \sigma \qquad \sigma \text{ holomorphic}, \quad \sigma^* \Omega^{3,0} = +\Omega^{3,0}$$

This would give O5/O9-planes

O-planes

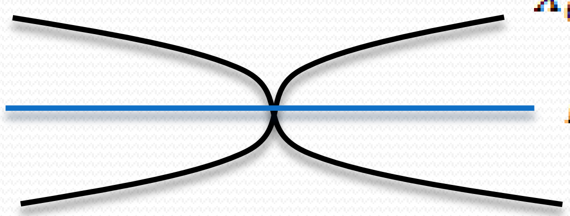
We can be quite explicit. Put $B_3 = X_6/\mathbf{Z}_2$

Let b_2 be a holomorphic section of $K_{B_3}^{-2}$

($K_{B_3} = \Lambda^3 T^* B_3$ is called the canonical line bundle)

Then we can write X_6 as a double cover of B_3 :

$$\xi^2 = b_2$$



The involution is $\sigma: \xi \to -\xi$ and the fixed locus/O7-plane is at $\{b_2 = 0\}$

Eg. if $B_3 = \boldsymbol{CP}^3$ then b_2 is simply a polynomial of degree eight.

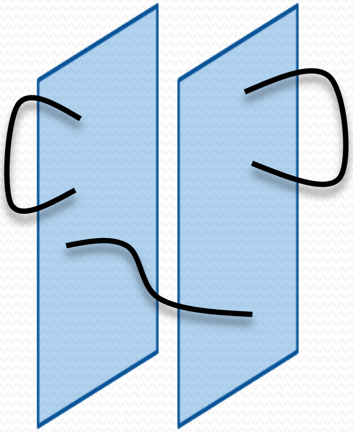
D-branes

A D-brane is a defect on which fundamental strings can end.

The low energy world-volume theory is the dimensional reduction of 10d super-Yang-Mills (with U(1) gauge group).

When parallel N D-branes approach each other, the gauge symmetry enhances:

$$U(1)^N \to U(N)$$



If we want to preserve the same SUSY as preserved by $(-1)^{F_L} P \sigma$, Then can consider D7-branes wrapped on holomorphic submanifolds of X_6, or D3-branes localized at points on X_6.

D-branes and Higgs bundles

Suppose we now wrap a stack of D7-branes on a holomorphic submanifold S of X_6 . Let's study equations for worldvolume fields.

The bosonic fields of the eight-dimensional Yang-Mills theory on the brane are a gauge field A_M and a complex adjoint field Φ.

Dimensional reduction of Hermitian Yang-Mills equations:

$$A_{\bar{1}}(z_1,z_2,z_3),\ A_{\bar{2}}(z_1,z_2,z_3), A_{\bar{3}}(z_1,z_2,z_3) \ \rightarrow \ A_{\bar{1}}(z_1,z_2),\ A_{\bar{2}}(z_1,z_2), \Phi(z_1,z_2)$$

Φ can be mapped to a (2,0) form on S (topological twisting).

The dimensionally reduced HYM equations can be written as the following equations on S:

$$F^{0,2} = 0 \qquad \bar{\partial}\Phi = 0 \qquad J \wedge F + i\,[\Phi^*, \Phi] = 0$$

Story now very similar to HYM.

First two equations define a Higgs bundle. Third equation holds iff the Higgs bundle is poly-stable.

D-branes

To be a bit more concrete, let's write down the generic form of sub-manifold on which brane is wrapped (ignoring gauge field).

Take $B_3 = X_6/\mathbf{Z}_2$ with O7-plane at $\{b_2 = 0\}$

D7-brane has RR charge +1; O7-plane has RR charge -4.

To cancel Ramond-Ramond charge of O7-plane, D7 should wrap a holomorphic submanifold of X_6 of the form

$$\{b_8 = 0\} \qquad\qquad b_8 \ \text{ section of } \ K_{B_3}^{-8}$$

This guarantees that for any 2-cycle A, $A \cdot D7 - 4\, A \cdot O7 = 0$

Actually due to a subtlety when the D7 and O7 intersect, b_8 must take special form:

$$\{ b_2 b_6 - b_4^2 = 0 \} \quad \longleftrightarrow \quad \{ \xi^2 b_6 - b_4^2 = 0 \}$$

Eg. if $B_3 = \boldsymbol{CP}^3$ then b_i are simply a polynomials of degree 8, 16, 24.

D-branes in orientifolds

Under orientifold action, the *U(N)* gauge field on a stack of D-branes transforms as

$$A \to -\gamma^{-1}\sigma^* A^T \gamma$$

$$\gamma \in U(N), \quad \gamma^{-1}\gamma^T = \mathbf{1}$$

This leads to the following possibilities:

- Two stacks are interchanged U(N)
- Stack is fixed and $\gamma^t = \gamma$ SO(N)
- Stack is fixed and $\gamma^t = -\gamma$ USp(N)

Unlike the heterotic string, no exceptional gauge symmetry. This will be different in F-theory.

S-duality

Type IIB has an exact strong-weak coupling duality, taking $g_s \to \dfrac{1}{g_s}$

In terms of the axio-dilaton $\tau = i\, e^{-\phi} + C_{(0)}$, this is $\tau \to -1/\tau$

The axionic shift symmetry $C_{(0)} \to C_{(0)} + 1$ acts as $\tau \to \tau + 1$

Together these generate an $SL(2,\mathbf{Z})$ duality group:

$$\tau \to \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbf{Z})$$

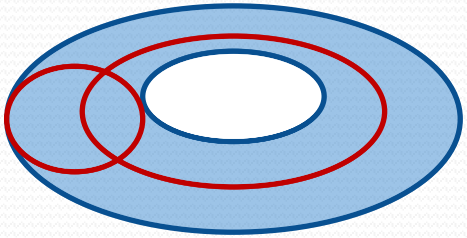
The pair $(B_2, C_{(2)})$ transforms as a doublet under $SL(2,\mathbf{Z})$

S-duality takes a fundamental string to a *D*-string. A more general $SL(2,\mathbf{Z})$ transformation takes a fundamental string to a *(p,q)*-string, a bound state of *p* fundamental and *q* *D*-strings.

We define *a (p,q)* 7-brane to be a 7-brane where a *(p,q)*-string can end.

Part III: F-theory

Elliptic curves



$$H^1(T^2, Z) = Z^2 \qquad a \cap a = b \cap b = 0 \qquad a \cap b = 1$$

Complex structure (“modular parameter”):

$$\tau = \frac{\int_b \Omega^{1,0}}{\int_a \Omega^{1,0}}$$

Symmetries:

$$S: (a, b) \rightarrow (-b, a) \qquad \Rightarrow \qquad \tau \rightarrow -1/\tau$$

$$T: (a, b) \rightarrow (a, b + a) \qquad \Rightarrow \qquad \tau \rightarrow \tau + 1$$

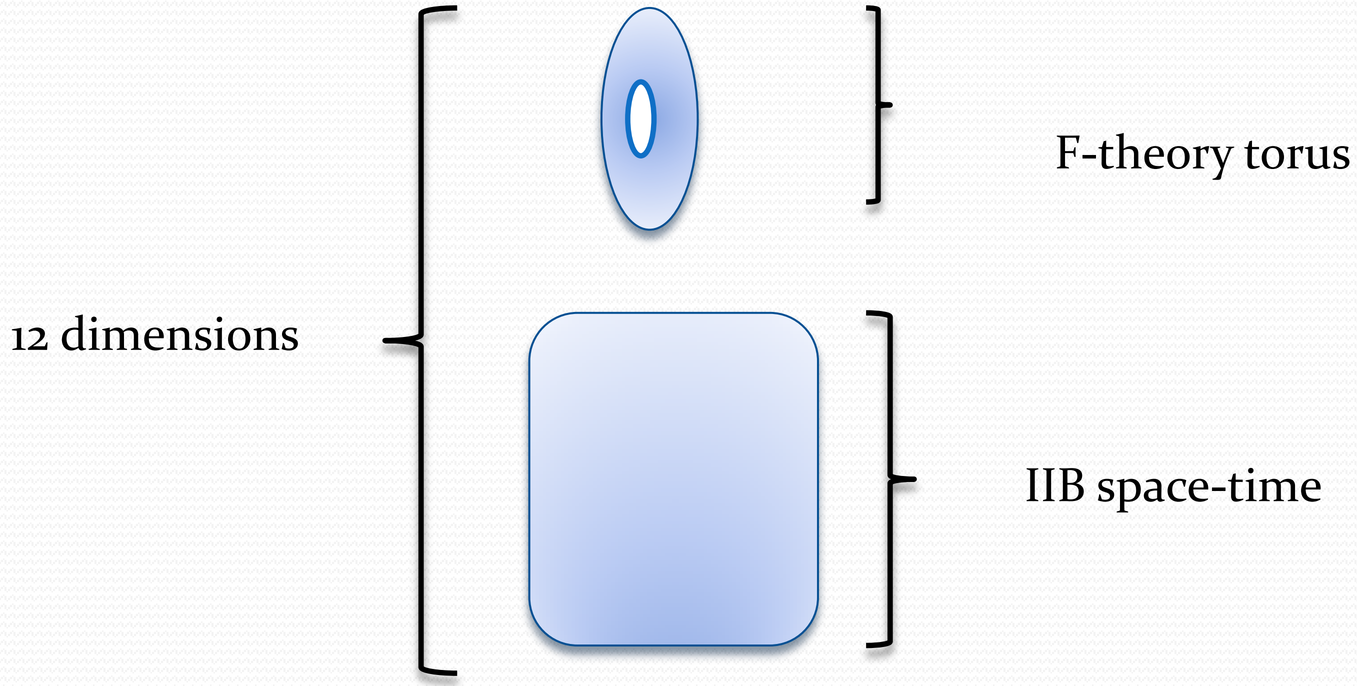
The complex structure parameter τ of an elliptic curve behaves just like the axio-dilaton of type IIB.

→ Formally attach elliptic curve to every point of IIB space-time, interpreting modular parameter as value of axio-dilaton

→ “Twelve-dimensional compactification of *F-theory*”

F-theory

In a picture:



Weierstrass form

Write elliptic fibration over IIB space-time in "Weierstrass form":

$$y^2 = x^3 + f\,x + g$$

Cubic equation $\longrightarrow$ elliptic curve

$f(z), g(z)$ are sections line bundles over IIB space-time

Specify $f(z), g(z)$ $\longrightarrow$ axio-dilaton is specified implicitly

<u>Important</u>:

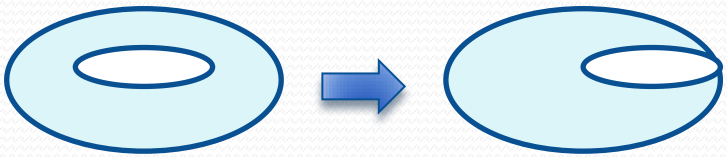
non-trivial profile for τ $\longrightarrow$ string coupling of order one, not weakly coupled

Somewhat similar to M-theory versus type IIA

Weierstrass form

$$y^2 = x^3 + f\,x + g$$

For special z, elliptic curve can be come singular



This happens when $\Delta \equiv 4\,f(z)^3 + 27\,g(z)^2 = 0$

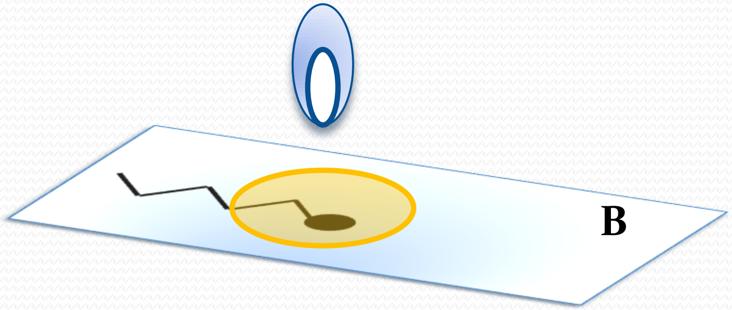
$\longrightarrow$ "discriminant locus" of the elliptic fibration

Interpretation in IIB space-time???

7-branes

Modular parameter τ has $SL(2,\mathbf{Z})$ monodromy around discriminant locus

$$\tau \to \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$$



Simplest case: $\tau \to \tau + 1$ (Picard-Lefschetz: $(a,b) \to (a, b+a)$)

Integrate over yellow disk: $\int_{\text{disk}} dF_{(1)} = \int_{S^1} dC_{(0)} = C_{(0)}|_{2\pi} - C_{(0)}|_0 = 1$

Hence singular fiber corresponds to D7-brane in IIB picture

Monodromy $M = \begin{pmatrix} 1+pq & p^2 \\ q^2 & 1-pq \end{pmatrix}$ ⟹ (p, q) 7-brane

M-theory perspective

Consider M-theory compactification to 3d with N=2 SUSY

(Will lift this to 4d N=1 SUSY momentarily)

$$M^{1,10} = \mathbf{R}^{1,2} \times Y$$

Y is eight-dimensional real manifold.

→ Solve $\delta\psi_m \propto \nabla_m \epsilon_8^+ = 0 \qquad \epsilon_8^+ \in \mathbf{8}_s \text{ of } SO(8)$

To get *3d N*=2 SUSY we need *two* covariantly constant spinors

$$\mathbf{8}_s = \mathbf{6} \oplus \mathbf{1} \oplus \mathbf{1}$$

→ *Y* has *Spin(6) = SU(4)* holonomy

→ *Y* is a *Calabi-Yau four-fold*

M-theory perspective

Duality in nine dimensions:

$$M\text{-theory on } T^2 \longleftrightarrow IIB \text{ on } S^1_R$$

Identifications:

Modular parameter $\longleftrightarrow$ axio-dilaton

$$\text{Area}(T^2) \longleftrightarrow 1/R$$

Take our Calabi-Yau 4-fold *Y* to be elliptically fibered and apply duality

$$Y = B_3 \ltimes T^2$$

$$M\text{-theory on } \boldsymbol{R}^{1,2} \times Y \longleftrightarrow \text{IIB on } \boldsymbol{R}^{1,2} \times S^1_R \times B_3 \ltimes T^2$$

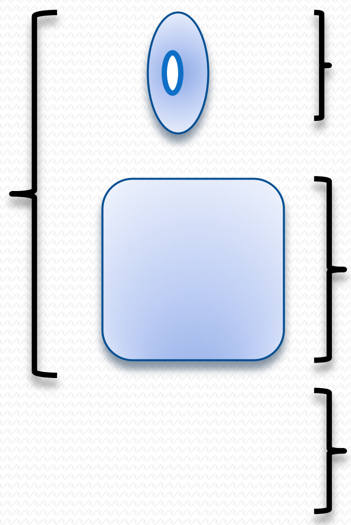
As $\text{Area}(T^2)$ shrinks to zero, get $\text{IIB on } \boldsymbol{R}^{1,3} \times B_3 \ltimes T^2$
and *N=1* SUSY in *4d*

$\longrightarrow$ "F-theory compactification on *Y* to four dimensions"

Schematic picture

"F-theory compactification on *Y* to four dimensions"

Y



E F-theory torus

B_3 Compactification manifold

$R^{1,3}$ Minkowski space

Y = elliptic Calabi-Yau
four-fold